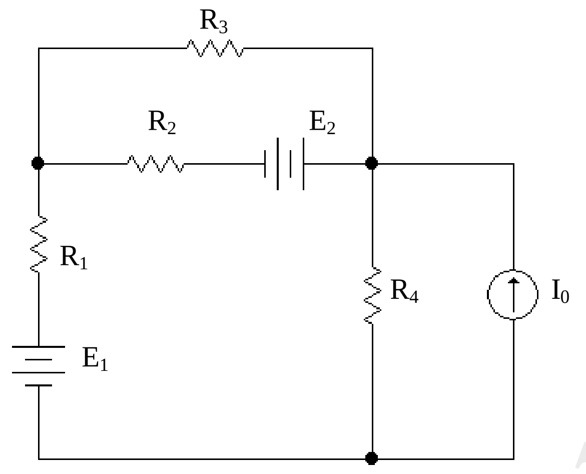
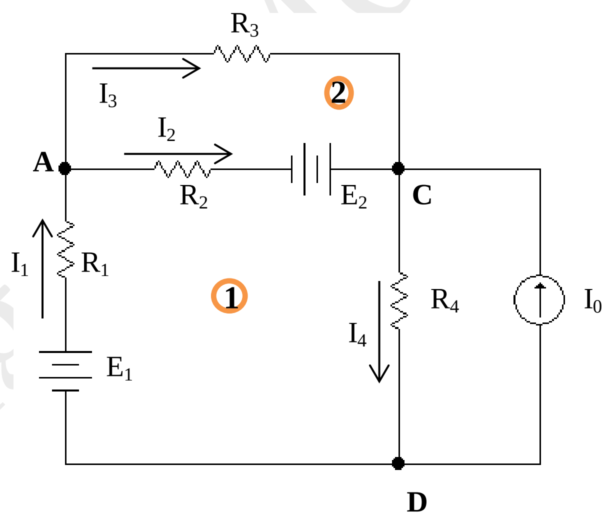
Determinare le correnti in intensità e verso in tutti i rami del circuito di figura.



$R_1 = 22\ k\Omega$
$R_2 = 56\ k\Omega$
$R_3 = 56\ k\Omega$
$R_4 = 33\ k\Omega$
$E_1 = 12\ V$
$E_2 = 5\ V$
$I_0 = 1\ mA$

1) Principi di KIRKHOFF.

Si rende necessario scrivere un numero di equazioni pari al numero di incognite. Per fare ciò si identificano i nodi e le correnti così come riportato in figura. I versi delle correnti sono scelti arbitrariamente.



Si scrivono tante equazioni quanti sono il numero di nodi meno uno e il numero di equazioni mancanti considerando le maglie del circuito.

Eq. Nodo **A**: $I_1 = I_2 + I_3$

Eq. Nodo **D**: $I_4 = I_1 + I_0$

Eq. Maglia **1**: $R_2 I_2 - E_2 + R_4 I_4 - E_1 + R_1 I_1 = 0$

Eq. Maglia **2**: $R_2 I_2 - E_2 - R_3 I_3 = 0$

Ing. Pasquale Moriconi

Riordinando le equazioni e portando a secondo membro i termini noti si ottiene il seguente sistema di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_4 I_4 = E_1 + E_2 \\ + R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 - I_4 = -I_0 \end{cases}$$

Ricavando la $\boldsymbol{I_4}$ dalla quarta equazione è possibile ridurre il sistema al seguente di 3 equazioni in 3 incognite:

$$I_4 = I_0 + I_1$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_4) I_1 + R_2 I_2 = E_1 + E_2 - R_4 I_0 \\ + R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

Procedendo alla risoluzione, ad esempio con il metodo di Cramer, si calcola dapprima il determinante dei coefficienti delle incognite:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -R_2(R_1 + R_4) - R_2 R_3 - [R_3(R_1 + R_4)] =$$

$$= -(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) - R_2 R_3$$

e successivamente i valori delle correnti richieste:

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} (E_1 + E_2 - R_4 I_0) & R_2 & 0 \\ E_2 & R_2 & -R_3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [E_2 R_2 - (E_1 + E_2 - R_4 I_0)(R_2 + R_3)]$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & (E_1 + E_2 - R_4 I_0) & 0 \\ 0 & E_2 & -R_3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [-E_2(R_1 + R_4) - R_3(E_1 + E_2 - R_4 I_0)]$$

$$I_3 = I_1 - I_2$$
$$I_4 = I_1 + I_0$$

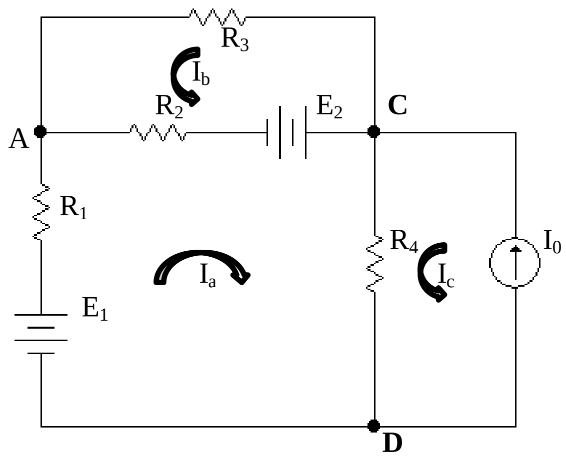
Numericamente si ottengono, con i valori di resistenze commerciali assegnati, i seguenti valori:

I_1 = - 222.9 μA
I_2 = - 66.8 μA
I_3 = - 156.1 μA
I_4 = + 0.777 mA

I valori negativi delle correnti I_1, I_2 e I_3 ottenuti indicano che le stesse correnti circolano in verso opposto a quanto ipotizzato all'inizio dell'analisi circuitale!

2) **Correnti di maglia.**

Si ipotizzano delle correnti di maglia ‘fittizie’ I_a, I_b e I_c come in figura e si scrivono le equazioni alle tre maglie.



Eq. Maglia $\mathbf{I_a}$: $R_2(I_a + I_b) - E_2 + R_4(I_a + I_c) - E_1 + R_1 I_a = 0$

Eq. Maglia $\mathbf{I_b}$: $R_2(I_a + I_b) - E_2 + R_3 I_b = 0$

Eq. Maglia $\mathbf{I_c}$: $R_4(I_a + I_c) + V_{I_0} = 0$

Inoltre:

$$I_c = I_0$$

Dunque si ottiene il sistema di tre equazioni in tre incognite seguente:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_4)I_a & + R_2 I_b & & = & E_1 + E_2 - R_4 I_0 \\ R_2 I_a & (R_2 + R_3) I_b & & = & E_2 \\ R_4 I_a & & + V_{I_0} & = & - R_4 I_0 \end{cases}$$

Considerando solo le prime due equazioni, in cui non compare l’incognita V_{I_0}, il sistema da risolvere diviene di 2 equazioni in 2 incognite (I_a e I_b) per cui, procedendo con il metodo di Cramer, si ottiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + R_2 + R_4) & R_2 \\ R_2 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} = (R_1 + R_2 + R_4)(R_2 + R_3) - R_2^2 =$$

$$= R_3(R_1 + R_2 + R_4) + R_2(R_1 + R_4)$$

e dunque:

$$I_a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} (E_1 + E_2 - R_4 I_0) & R_2 \\ E_2 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [(E_1 - R_4 I_0)(R_2 + R_3) + E_2 R_3]$$

e:

$$I_b = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}(R_1 + R_2 + R_4) & (E_1 + E_2 - R_4 I_0) \\ R_2 & E_2\end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\,[E_2(R_1 + R_4) + R_2(R_4 I_0 - E_1)]$$

Quindi dal nodo A si ottiene:

$$I_2 = I_a + I_b$$

e dal nodo D:

$$I_4 = I_a + I_0$$

Numericamente si ottengono, con i valori di resistenze commerciali assegnati, i seguenti valori e versi delle correnti:

I_a = -222.9 mA
I_b = 156 μA

quindi:

I_2 = - 66.9 μA (verso reale C → A)
I_4 = + 0.777 mA (verso reale C → D)

per cui si ottengono anche:

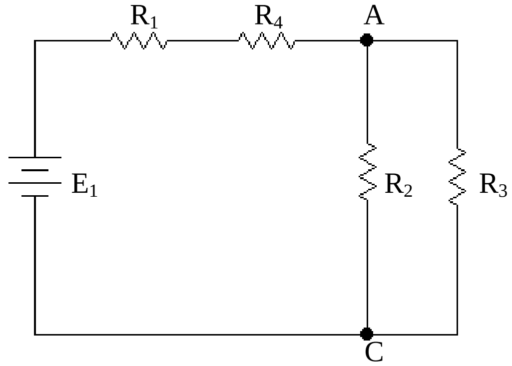
$I_1 = I_a$ = -222.9 mA (verso reale A → D)
$I_3 = I_b$ = 156 μA (verso reale C → A)

come nell'analisi al punto precedente.

3) Sovrapposizione degli effetti

E' necessario far agire un generatore alla volta avendo cura di disattivare tutti gli altri presenti nella rete, *aprendo* i generatori di corrente non coinvolti nell'analisi e *cortocircuitando* quelli di tensione analogamente non coinvolti. Si consideri che non sempre è conveniente ricavare da ogni analisi parziale tutte le grandezze richieste dal problema, in quanto potrebbe essere maggiormente utile individuare un 'target' diverso che, a conti fatti, consenta di trovare i dati richiesti più facilmente. Si individua il 'target' nella tensione V_{AC}.

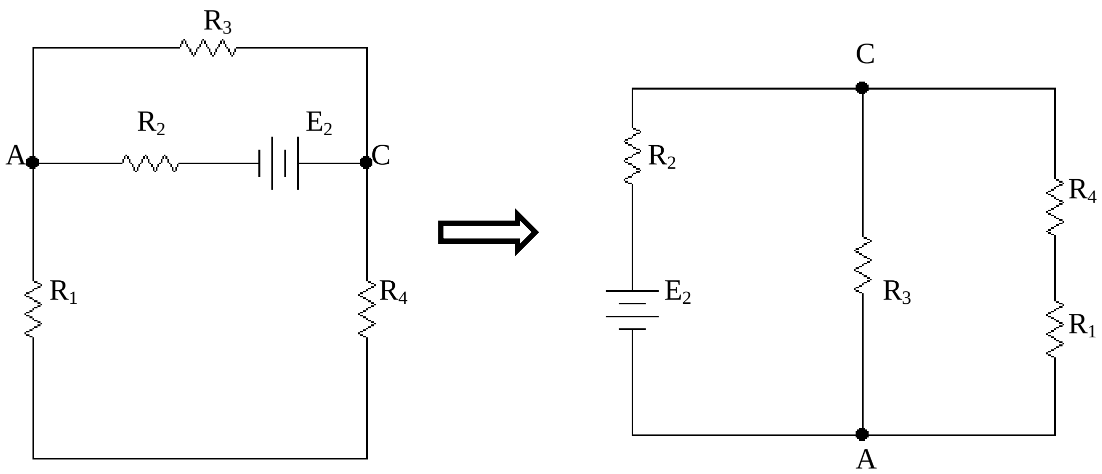
a) Agisce E_1 (viene cortocircuitato E_2 e aperto I_0) per cui il circuito da analizzare diventa il seguente:



In cui R_1 e R_4 sono in serie e R_2 e R_3 sono in parallelo, per cui applicando la regola del partitore di tensione si ottiene:

$$V'_{ac} = E_1 \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3 + R_4}$$

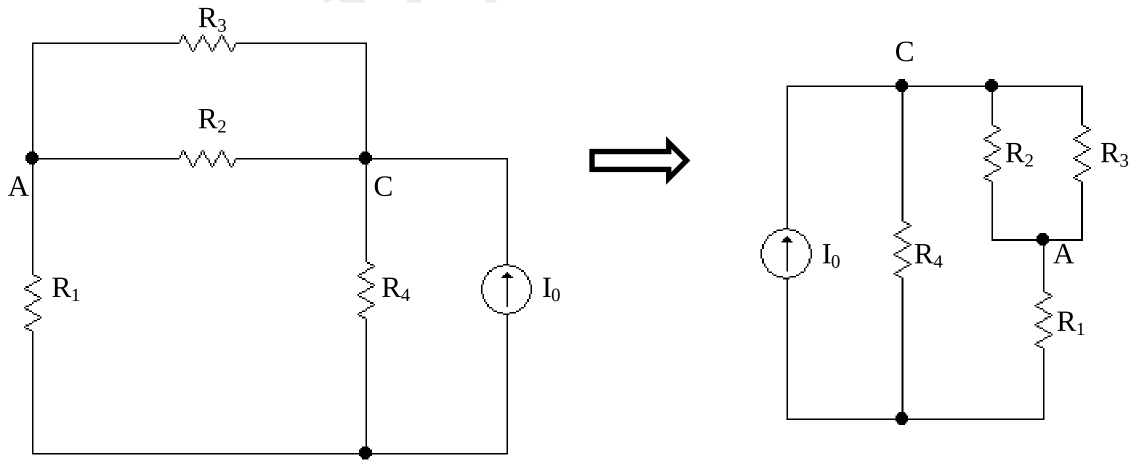
b) <u>Agisce E_2</u> (viene cortocircuitato E_1 e aperto I_0) per cui il circuito da analizzare diventa il seguente:



in cui si ha:

$$V''_{ac} = -E_2 \frac{R_3 // (R_1 + R_4)}{R_2 + R_3 // (R_1 + R_4)}$$

c) <u>Agisce I_0</u> (vengono cortocircuitati E_1 ed E_2) per cui il circuito da analizzare diventa il seguente:



in cui la corrente che circola nel parallelo di R_2 e R_3 da C verso A risulta:

$$I_{ca} = I_0 \frac{R_4}{R_1 + R_2 // R_3 + R_4}$$

e quindi:

$$V_{ac}''' = -(R_2 // R_3)\, I_{CA}$$

per cui si ottiene:

$$V_{ac} = V_{ac}' + V_{ac}'' + V_{ac}'''.$$

Separatamente conviene calcolare:

$R_2 // R_3$ = 28 kΩ e $R_3 // (R_1 + R_4)$ = 27.75 kΩ

che forniscono:

V_{ac}' = 4.05 V V_{ac}'' = - 1.657 V V_{ac}''' = - 11.13 V

e complessivamente:

V_{ac} = - 8.74 V.

A questo punto si determina immediatamente l'intensità e il verso della corrente in R_3:

$$I_3 = \frac{V_{ac}}{R_3} = -156\ \mu\text{A}.$$

Il segno meno indica che la corrente in R_3 va dal punto C verso il punto A.

Inoltre l'applicazione della Legge Generalizzata di Ohm al ramo compreso fra A e C contenente R_2 e E_2 fornisce, ipotizzando una corrente I_2 dal punto A verso il punto C:

$$V_{ac} = R_2 I_2 - E_2$$

Perciò risolvendo rispetto a I_2 si ottiene:

$$I_2 = \frac{V_{ac} + E_2}{R_2}$$

numericamente:

I_2 = - 66.8 μA

che indica il fatto che la corrente I_2 ha un verso reale da C verso A.

A questo punto il bilancio di correnti al nodo C fornisce, ipotizzando una corrente in R_4 dal punto C verso il punto D:

$$I_2 + I_3 + I_4 = I_0$$

e quindi:

$$I_4 = I_0 - I_2 - I_3 = 778\ \mu\text{A}$$

Il segno positivo indica che effettivamente la corrente in R_4 scorre nel verso ipotizzato. Inoltre il bilancio di corrente al nodo D, ipotizzando una corrente nel ramo contenente R_1 e E_1 dal nodo D verso il nodo A, fornisce:

$$I_4 = I_0 + I_1$$

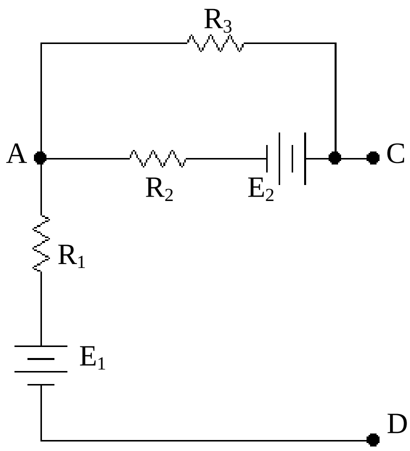
per cui:

$$I_1 = I_4 - I_0 = -222.0\ \mu A.$$

Ancora una volta il segno negativo indica che il verso reale della corrente in R_1 è quello da A verso D.
Anche nel caso di analisi del circuito con il Principio di Sovrapposizione degli Effetti i risultati ottenuti sono uguali a quelli ottenuti con i Principi di Kirkhoff e il metodo delle correnti di maglia.

4) Teorema di Thevenin

Applicando il teorema di Thevenin è necessario individuare i punti favorevoli all'analisi. A tal proposito si scelgono i punti C e D. Innanzitutto si considera il circuito fra i punti C e D a 'vuoto' per cui il circuito da analizzare diventa il seguente in cui occorre determinare la tensione $V_{cd} = V_{th}$.



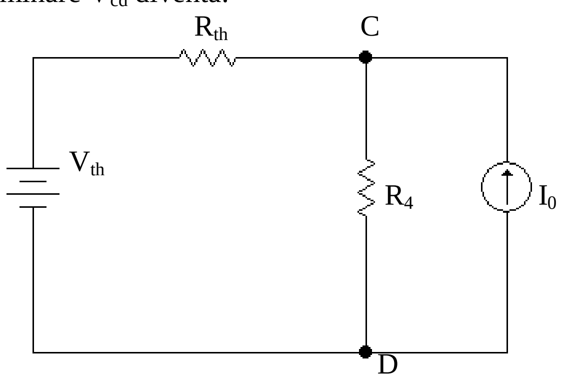
Dato che nel ramo contenente E_1 non circola corrente, essendo aperto, si ottiene:

$$V_{th} = V_{ca} + V_{ad} = E_2 \frac{R_3}{R_2+R_3} + E_1 = 14.5\ \text{V}$$

e

$$R_{th} = R_1 + R_2 // R_3 = 50\ \text{k}\Omega$$

Quindi il circuito per determinare V_{cd} diventa:



Quindi, per determinare V_{cd}, basta applicare il principio di sovrapposizione degli effetti che fornisce in ultimo:

$$V_{cd} = V_{th}\frac{R_4}{R_4 + R_{th}} + I_0(R_4 // R_{th})$$

che fornisce:

$$V_{cd} = 5.77 + 19.88 = 25.65 \text{ V}.$$

A questo punto si può determinare immediatamente la corrente in R_4 essendo data dal rapporto (Legge di Ohm):

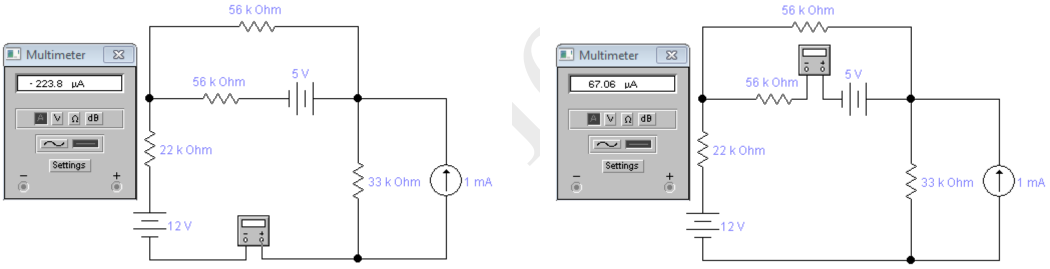
$$I_4 = \frac{V_{cd}}{R_4}$$

e analogamente al caso precedente, con il bilancio delle correnti ai nodi e la legge generalizzata di Ohm, si determinano tutte le altre correnti della rete ottenendo ancora una volta gli stessi risultati, in termini di intensità e verso, determinati negli altri punti di analisi.

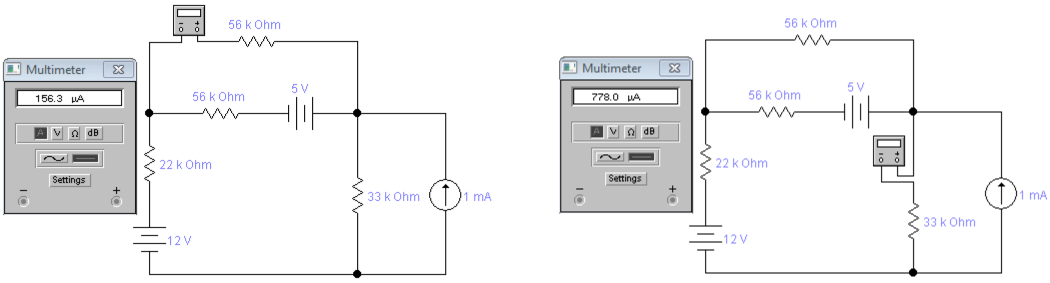
5) Analisi con EWB o NI Multisim

La simulazione con EWB, a conferma dei risultati teorici ottenuti, fornisce i seguenti valori (il valore numerico fornito dallo strumento, se negativo, va interpretato alla luce dell'inserzione dello stesso):

Per I_1 e I_2:



Per I_3 e I_4:



c.v.d.